

La razonable utilidad de las matemáticas: una visión personal

José Manuel Vega
E.T.S.I. Aeronáuticos
Universidad Politécnica de
Madrid

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo es una modificación de la Lección Magistral que impartí el 10 de diciembre de 2008 a la Promoción de Ingenieros Aeronáuticos que se graduó ese día. En atención al auditorio, el tono de la lección era relativamente elemental, casi de divulgación. Aunque gran parte de los lectores de esta revista son ingenieros aeronáuticos, me ha parecido conveniente elevar solamente un poco ese tono en el artículo, por dos razones. Primero, porque otros lectores de la revista pueden agradecerlo. Y, en segundo lugar, porque el tono ayuda a recordar las ideas básicas, relativamente sencillas, que hay detrás de muchos problemas complicados.

El título está inspirado en el del famoso ensayo [1] publicado en 1960 por Eugene Wigner, matemático y físico húngaro que recibió el premio Nobel de Física en 1963. El artículo de Wigner era, naturalmente, una provocación. Mi variación, lejos de provocar, busca reflexionar sobre la utilidad de las Matemáticas e ilustrarla mediante algunos ejemplos. La perspectiva será la de una visión personal de todo esto, como he querido resaltar en el título. Como se verá, el artículo tiene dos partes bien diferenciadas. Empezaré hablando de las Matemáticas, y de su papel en la Ciencia y la Tecnología. Las citas que utilizaré tienen, todas ellas, al menos cincuenta años. Con ello, quiero poner de manifiesto que parte de la discusión que sigue es antigua y que, en cierto modo, nada nuevo se ha dicho sobre todo esto recientemente. Basta leer la introducción de Richard Courant a su conocido texto [2] con David Hilbert, para darse cuenta de lo

actuales que pueden ser diagnósticos hechos por una mente lúcida hace más de medio siglo. La segunda parte del artículo contiene varios ejemplos de aplicación de las Matemáticas a problemas de Ingeniería, tomados de desarrollos que se realizan en la E.T.S.I. Aeronáuticos.

Conviene advertir desde este momento, para evitar una interpretación reduccionista de lo que sigue, que la Matemática Aplicada e Industrial, tal como la entiendo yo, es algo distinto y de mayor alcance que la actividad de los departamentos universitarios tradicionales de Matemáticas y Matemática Aplicada. En otras palabras, para bien o para mal, las Matemáticas son mucho más que la actividad de los matemáticos; entender esto es esencial a día de hoy, cuando el papel de las Matemáticas en el desarrollo tecnológico está llamado a representar un papel central, que requiere nuevos modos y actitudes, cuya descripción es parte del objeto de este artículo. Esto se entiende bien en la Universidad Politécnica de Madrid donde, afortunadamente, es fácil reconocer que son muchos los departamentos no estrictamente matemáticos que contribuyen a la actividad matemática de la universidad.

2. LA MATEMÁTICA APLICADA E INDUSTRIAL

Decía Bertrand Russell, provocando nuevamente, que las Matemáticas son la ciencia donde nunca se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es verdadero. Pero con Le Lionnais [3] podríamos también decir que, por el contrario, las Matemáticas son la única ciencia en

que siempre se sabe exactamente de qué se habla y que lo que se dice es verdadero. Cuestión de perspectiva. Simplificando hasta donde requiere la ocasión, las Matemáticas no enuncian verdades relativas a la realidad circundante (cuyo entendimiento es el verdadero objeto de la Ciencia) sino, más bien, “sólo” establecen relaciones entre objetos abstractos, eso sí, relaciones verdaderas. Es un modo coloquial de ilustrar la definición de Bertrand Russell [4] de Matemática Pura, como el conjunto de todas las proposiciones de la forma $p \Rightarrow q$, donde p y q son a su vez proposiciones sujetas a ciertas reglas. En este sentido, para Russell la Matemática (Pura) es indistinguible de la Lógica. El pensamiento matemático está sujeto a reglas que, cuando se aplican correctamente, permiten asegurar, en una medida inaccesible a cualquier otra ciencia, que las proposiciones matemáticas son verdaderas. Pero al mismo tiempo, las proposiciones son puramente abstractas, pertenecientes a un mundo puramente intelectual. Y esto tiene una ventaja y un inconveniente; cuestión de perspectiva, otra vez. La ventaja es que las Matemáticas se convierten en la herramienta esencial de la Ciencia. Algunos amigos míos de facultades de ciencias, y muchos matemáticos puros, no están muy conformes con el papel secundario que la palabra herramienta parece atribuir a las Matemáticas. Pero las Matemáticas no son “una” herramienta, son “la” herramienta, y eso las convierte en el lenguaje de la Ciencia, nada menos. El inconveniente, naturalmente, es que si se ejercita sin criterio la tarea de desarrollar conocimientos matemáticos, se corre el grave riesgo de convertir una ciencia en un juego relativamente estéril.

El papel de las Matemáticas en la enseñanza, la investigación científica y el desarrollo tecnológico es polifacético. Aquí, sólo resalto su papel formativo en la enseñanza de la Ingeniería. Las Matemáticas ayudan a potenciar la disciplina intelectual y la capacidad de abordar con éxito problemas complejos. Ambas capacidades son necesarias

para conseguir avances genuinos en el intento humano de controlar la realidad circundante, que es lo que, en definitiva, es la Tecnología.

Normalmente, se tiene una impresión negativa de las Matemáticas, quizá debido a malos recuerdos de la educación recibida. Esta percepción conduce a sostener el lugar común de que las Matemáticas conllevan una abstracción excesiva, y que sirven para poco. La afirmación es rotundamente falsa, y más a día de hoy, cuando reducir costes y tiempo de desarrollo es crucial para la supervivencia de la actividad industrial en escenarios cada vez más competitivos. Tal empeño abre nuevas oportunidades de actividad de I+D en departamentos universitarios, y de creación de empresas de base tecnológica. Esto es cierto a nivel internacional pero sobre todo en España, donde la interacción entre la Industria y la Universidad ha sido tradicionalmente muy frágil. Pues bien, aprovechar estas oportunidades requiere un enfoque genuinamente interdisciplinar de la labor de I+D, en que la aplicación de conceptos básicos, modelado, simulación numérica, experimentación y fabricación, deben combinarse en ciclos cada vez más cortos. En tal escenario, la Matemática Aplicada e Industrial está destinada a jugar un papel crecientemente activo. Pero tal papel requiere también una actitud nueva, que pasa por entender el problema al que se están aplicando las Matemáticas, y su entorno. Esto se facilita enormemente desde la colaboración estrecha con expertos de otros campos. Ignorar esa interrelación, aislando los aspectos puramente matemáticos del problema, desde una visión estrecha y perezosa de las tareas de I+D, conduce justamente a los peligros a que me refería más arriba. La colaboración no es nunca fácil sin una apertura mental genuina a modos, lenguajes y objetivos múltiples y, quizá, distintos a los nuestros.

Creo sinceramente que no es conveniente ignorar lo anterior, ni en la elaboración de Planes de Estudio ni en la labor docente diaria.

2.1. Las Matemáticas simplifican

Esta afirmación puede parecer sorprendente a quien sufrió atraganto matemático alguna vez. Y la sorpresa será mayor cuando me refiera a las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}$$

que establecen dos relaciones entre la velocidad, \mathbf{v} , la presión, p y las derivadas de ambas, en el movimiento de un fluido cuya densidad permanece constante. La velocidad, la presión, el espacio y el tiempo están adimensionalizadas, es decir, están medidas en unidades características, típicas del sistema físico concreto que se esté analizando. Las ecuaciones anteriores son tremendamente más sencillas que el gas o el líquido que describen, cuya estructura física y propiedades sensibles (color, sabor, olor) resultan irrelevantes en el ámbito de las ecuaciones y se deben, en última instancia, a su estructura como materia, cuya comprensión requiere bajar a la escala subatómica descrita por la Física Cuántica. Me resulta fascinante el modo en que todo se organiza para, desde una estructura nanoscópica tan compleja, llegar a proporcionar a escala macroscópica (mayor que, digamos, una micra, que es el diámetro del cabello humano) una descripción tan sencilla. El fluido concreto aparece en las ecuaciones solamente a través del número de Reynolds, Re , que es inversamente proporcional la viscosidad del fluido y proporcional a la velocidad y al tamaño.

2.2. Las Matemáticas son generales

No entiendo esta afirmación en sentido universal sino en un sentido muy concreto. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen, por ejemplo, el movimiento del agua (cuya densidad, como líquido, es muy aproximadamente constante) alrededor de un pez

o de un submarino. También describen el movimiento del aire alrededor de una persona andando, o de un coche, o de un tren. Esta segunda afirmación es menos obvia porque, como enseña la experiencia diaria al, por ejemplo, inflar un globo, la densidad (masa por unidad de volumen) del aire no siempre es constante. Pero la densidad del aire permanece aproximadamente constante en el movimiento de una corriente libre alrededor de objetos si el número de Mach (velocidad del objeto dividida por la velocidad del sonido) es pequeño. Tal aproximación, y otras muchas, son sólo accesibles desde la Física, mediante su lenguaje natural, las Matemáticas: simplificando para separar lo accesorio de lo esencial. Simplificar, pero sin pasarse o, en palabras de Einstein: *make it simple, but not simpler*. Volvemos así al punto anterior, otra vez. Las Matemáticas son generales porque simplifican.

2.3. Las Matemáticas son útiles

Los hermanos Wright [5] eran fabricantes de bicicletas que no utilizaron, ni podían, la formulación matemática del movimiento del aire alrededor de una aeronave para conseguir volar un artefacto más pesado que el aire. Sí utilizaron, en cambio, y de modo muy lúcido, el método científico. Y debo decir que los hermanos Wright tuvieron suerte al no utilizar las Matemáticas. Aunque las ecuaciones de Navier-Stokes eran bien conocidas en esa época, las soluciones de éstas que permiten entender por qué vuela un avión eran inaccesibles a los métodos de resolución del momento. Y, aún más, extrapolando (de modo indebido) soluciones de las ecuaciones en situaciones distintas, que sí eran conocidas entonces, se hubiera llegado a la conclusión, errónea, de que el vuelo era imposible mediante los métodos de propulsión de la época. La razón es que tal extrapolación conducía a una sobreestimación brutal de la resistencia que produce el aire circundante.

A pesar de estos inicios tan desalentadores para las Matemáticas, la situación es hoy completamente distinta. Podemos afirmar que, si bien se consiguió volar sin Matemáticas, sin ellas sería sencillamente imposible mejorar los diseños de aeronaves comerciales para, por ejemplo, disminuir la resistencia aerodinámica y la producción de contaminantes, buscando ahorrar combustible y disminuir el impacto ambiental, respectivamente. A día de hoy, el consumo de combustible por pasajero, y el tiempo medio de vuelo para una determinada distancia, son los más favorables de toda la historia de la aviación, y eso sólo se consigue optimizando cuidadosamente el diseño de los aviones. Y, buscando dar un paso más, uno de los retos actuales de la Industria Aeronáutica consiste en sustituir progresivamente los costosísimos ensayos en túnel aerodinámico por simulaciones numéricas. Con ello se pretende reducir los elevados costes de diseño y el tiempo de desarrollo, para poder competir con éxito en un mercado cada vez más exigente.

3. FLUIDOS EN INGENIERÍA AEROESPACIAL

El movimiento de un fluido (líquido o gas) viene descrito por variantes de las ecuaciones de Navier-Stokes, escritas más arriba, que se conocen desde el siglo XIX. Las variantes consisten en añadir nuevas incógnitas y ecuaciones, para poder estudiar casos en que la densidad y/o la temperatura son variables. Se trata de *ecuaciones diferenciales*, es decir, de relaciones entre las magnitudes que describen al fluido en cada punto (velocidad, presión, densidad y temperatura) y sus derivadas espaciales y temporales. Tales ecuaciones se deducen de leyes físicas bien conocidas, que establecen principios tales como que la masa, la cantidad de movimiento y la energía se conservan, es decir, no se crean ni se destruyen.

La resolución de las ecuaciones del movimiento fluido consiste en calcular los valores de las magnitudes fluidas

en cada punto y cada instante. Por ejemplo, resolviéndolas para el movimiento alrededor de una aeronave, pueden calcularse las fuerzas del aire sobre el avión, para predecir la *sustentación*, es decir, la fuerza vertical que mantiene al avión en vuelo, y la *resistencia aerodinámica*, es decir la fuerza horizontal con que el aire frena al avión, causante del gasto de combustible. También puede calcularse el *ruido* que produce el avión, que es importante (por razones ambientales) en situaciones de despegue y aterrizaje. Pero, a diferencia de lo que sucede con las ecuaciones de segundo grado que se enseñan en bachillerato, las ecuaciones de Navier-Stokes no pueden resolverse con lápiz y papel, ni siquiera de forma aproximada, salvo en algunas situaciones muy sencillas. Por ello, en los problemas industriales, las ecuaciones deben discretizarse para resolverlas mediante un ordenador.

Aunque el tiempo y el espacio son continuos, los ordenadores sólo pueden tratar *magnitudes discretas*, que se representan mediante conjuntos (finitos) de números. *Discretizar una ecuación diferencial* consiste en dividir el espacio (en cada dimensión) y el tiempo en pequeños intervalos, considerando los valores de las magnitudes fluidas (velocidad, presión, etc.) solamente en dichos intervalos discretos. En ellos, las derivadas se sustituyen por cocientes incrementales y las ecuaciones diferenciales se aproximan por relaciones que deben ser algebraicas, es decir, consistir solamente en sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, que son las operaciones que puede realizar el ordenador. Establecer esas relaciones aproximadas recibe el nombre de discretizar las ecuaciones, y la disciplina que se ocupa de tal cosa, y de resolver las ecuaciones algebraicas resultantes, se conoce como *Cálculo Numérico*.

Debe llegarse a un compromiso entre la *precisión del cálculo* y el *coste computacional*, que está relacionado con el tiempo de cálculo y el tamaño del ordenador. Si, para calcular la aerodinámica de un automóvil, se divide su superficie en intervalos de medio

metro, los resultados son poco fiables; y no se obtiene información precisa de fenómenos cuyo tamaño sea menor como, por ejemplo, el efecto de los retrovisores. Si, en cambio, se utiliza una discretización demasiado fina se ven todos los detalles, pero al precio de tener demasiados intervalos de cálculo (muy pequeños) y, por tanto, una cantidad excesiva de ecuaciones algebraicas, que pueden requerir un tiempo de cálculo y una capacidad de disco duro de los que no se dispone.

3.1. Aerodinámica de aviones

Para comprender el comportamiento aerodinámico de un avión hay que estudiar, al mismo tiempo, toda la masa de aire afectada por su movimiento. Y resulta que, en condiciones realistas de vuelo, el movimiento del aire circundante es tan complejo, que si quisiéramos conocer todos sus detalles necesitaríamos un discretización que tuviera del orden de 10^{18} puntos (un trillón de puntos), lo que resulta impracticable hoy para cualquier ordenador o superordenador. Y lo seguirá siendo durante décadas. Por eso, es necesario poner a punto métodos que permitan soslayar esta dificultad, estableciendo un compromiso entre precisión y tiempo de cálculo, como se hace continuamente en la práctica diaria de la Ingeniería. El tiempo de cálculo es muy importante, y tiene un efecto doble. Acortar el ciclo de diseño de un producto de un año a seis meses supone reducir el coste de desarrollo a la mitad. Y también puede implicar llevar el producto al mercado antes que la competencia, lo que puede tener un valor incalculable.

La primera solución viable al problema de la discretización del movimiento del aire alrededor de un avión son los *modelos de turbulencia*, desarrollados durante los últimos veinte años. En estos métodos se renuncia a describir con precisión las estructuras fluidas más pequeñas, modelando su efecto en las estructuras de tamaño mayor, que son las que realmente se

calculan. Esto es, se utilizan discretizaciones que pudiéramos describir como “inteligentes”. Pero, aún con estos métodos numéricos, simular el flujo alrededor de una aeronave en condiciones realistas requiere del orden de 30 millones de puntos en la discretización espacial, que requieren un tiempo de cálculo de varios días.

Además, no hay que hacer sólo un cálculo, sino miles, porque es necesario estudiar el comportamiento del avión a varias velocidades, con distintos ángulos de incidencia del aire y con deflexiones diferentes de los sistemas de control (flaps y timones). Por ejemplo, si seleccionamos cinco velocidades distintas del avión, cinco ángulos de incidencia, cinco ángulos de giñada y cinco ángulos distintos para cada una de las (típicamente) cinco superficies de control, el número total de casos a analizar es de 5^8 , es decir, 390.625. Como cada caso necesita varios días de cálculo, es fácil imaginar el tiempo de diseño del avión que resultaría.

Actualmente no se calculan todos los casos, sino un número muy limitado de ellos, y se interpola (como buenamente se puede) para estimar los casos intermedios. Una alternativa a este modo de proceder se basa en ideas matemáticas bien conocidas desde hace setenta años, pero aplicadas desde una perspectiva nueva. Tal perspectiva puede ilustrarse con nuestra experiencia diaria, en que nuestro cerebro recibe a través los sentidos una cantidad gigantesca de información. El cerebro filtra, analiza y almacena esta información de manera sorprendentemente eficaz, discriminado la información relevante para un fin determinado, y utilizando las redundancias que tal información posee. Por ejemplo, cuando nos movemos entre una multitud de personas en un aeropuerto, la información que recibimos incluye caras, ropas, sonidos, carteles publicitarios o de información, paneles electrónicos, colores, olores, etc. Y, sin embargo, el cerebro es capaz de seleccionar sólo una pequeña parte de toda esa información, y guiarnos a través de los pasillos y es-

caleras adecuados hasta alcanzar la puerta de embarque. Y almacena la parte relevante de esa información para facilitar el modo de proceder la siguiente vez que volemos, en ese o en otro aeropuerto.

3.2. Descomposición en valores singulares de matrices y tensores

Para matrices, este método se enseña en cursos de Álgebra Lineal [6] y puede describirse del siguiente modo. Consideremos una matriz, es decir, una tabla (con dos entradas) de $m_1 \times m_2$ números que se denotan como S_{ij} . Tales números pueden corresponder, por ejemplo, al valor de la presión en distintos puntos de la discretización del campo fluido en la superficie de una aeronave. Cada columna de la matriz representa así un estado del flujo; a cada uno de esos estados se le llamará *instantánea* (snapshot) del flujo en lo que sigue. El índice i numera los puntos de la discretización y el índice j numera valores representativos de un parámetro; por ejemplo, el número de Mach. Nótese que si se considera por separado la dependencia de las coordenadas espaciales, o si se considera más de un parámetro, se tienen más de dos índices, y la matriz se convierte en un tensor, es decir, una tabla con más de dos entradas.

Restringiéndonos de momento a matrices, la descomposición *ortogonal propia de una matriz* [6] permite escribir sus $m_1 \times m_2$ elementos como

$$S_{ij} = \sigma_1 U_{i1} V_{j1} + \sigma_2 U_{i2} V_{j2} + \dots + \sigma_r U_{ir} V_{jr}$$

donde $r \leq m_1, m_2$ se conoce como *rango* de la matriz; los números positivos $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ se conocen como *valores singulares*, y los vectores U_{i1}, \dots, U_{ir} , como *modos espaciales*. Así, cada instantánea del flujo (columna de la matriz) es una combinación lineal de los modos espaciales; y, recíprocamente, cada modo espacial es una combinación lineal de las instantáneas del flujo. Los vectores U_{i1}, \dots, U_{ir} y V_{j1}, \dots, V_{jr} son los

autovectores de las matrices $A \cdot A^T$ y $A^T \cdot A$, respectivamente. Como éstas últimas son simétricas y definidas positivas, los autovectores pueden seleccionarse de modo que sean unitarios y ortogonales. Esto último es importante, porque significa que cada sumando de la descomposición tiene una norma (es decir, una medida) igual al correspondiente valor singular. En otras palabras, si un valor singular es pequeño, ignorando el correspondiente sumando, se sigue teniendo una buena aproximación de los elementos de la matriz. Despreciando los sumandos correspondientes a valores singulares pequeños, se tiene una suma de, digamos, s sumandos.

Si los elementos de la matriz se han seleccionado al azar, seguramente a será el mínimo de m_1 y m_2 . En tal caso, la descomposición anterior no conlleva ninguna simplificación, ni es útil. Pero si, por el contrario, los elementos de la matriz están relacionados entre sí, entonces debemos esperar que s sea menor que m_1 (el número de puntos de la discretización) y que m_2 (el número de valores de los parámetros que se han considerado). Tal reducción se basa en que el método aprovecha implícitamente las redundancias que existen entre los elementos de la matriz. Las redundancias pueden no resultar obvias a primera vista, pero están necesariamente presentes de modo implícito si existen relaciones algebraicas entre los elementos. En nuestro caso, los elementos de la matriz están relacionados entre sí precisamente porque verifican, en cada punto, las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos o, dicho de otra manera, porque verifican las leyes físicas que estas ecuaciones representan. Por tanto, debe esperarse que el valor de s sea mucho menor que m_1 y que m_2 .

La extensión inmediata de lo anterior a tensores de mayor orden no es inmediata. Restringiéndonos por sencillez a un tensor de tercer orden, con $m_1 \times m_2 \times m_3$ elementos, la extensión natural de la descomposición ortogonal propia conduce a una expresión del tipo

$$S_{ijk} = \sigma_1 U_{i1} V_{j1} W_{k1} + \sigma_2 U_{i2} V_{j2} W_{k2} + \\ + \sigma_r U_{ir} V_{jr} W_{kr}$$

donde el número mínimo de sumandos necesarios, r , recibe el nombre de *rango del tensor*. Pero, desgraciadamente, la determinación del rango es un problema matemático no resuelto a día de hoy para tensores generales de orden mayor que dos. De hecho, la construcción de algoritmos efectivos para el cálculo de descomposiciones minimales conduce a un problema matemático mal planteado [7]. Por ello, se han buscado descomposiciones alternativas que conduzcan a algoritmos bien planteados. Entre ellas, la *descomposición en valores singulares de alto orden* (high order singular value decomposition [8]) consiste en descomponer el tensor en la forma

$$S_{ijk} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{j_1=1}^{r_2} \sum_{k_1=1}^{r_3} \sigma_{i_1 j_1 k_1} U_{i_1} V_{j_1} W_{k_1}$$

donde $\sigma_{i_1 j_1 k_1}$ son las componentes de un nuevo tensor que se conoce como núcleo del tensor (core tensor); los enteros $r_1 \leq m_1$, $r_2 \leq m_2$ y $r_3 \leq m_3$ se conocen como rangos en cada dimensión del tensor. Se tiene así una diferencia esencial con la descomposición en tensores de rango uno considerada más arriba, en que el factor σ depende solamente de un índice. Los vectores U_{i1} , ..., U_{ir} , V_{j1} , ..., V_{jr} y W_{k1} , ..., W_{kr} resultan ser los autovectores (que pueden seleccionarse como unitarios y ortogonales) de tres matrices simétricas y definidas positivas, definidas a partir del tensor. Si los elementos del núcleo del tensor correspondientes a los valores más altos de los índices son suficientemente pequeños, truncando la suma anterior de modo que se retengan solamente $s_1 < r_1$, $s_2 < r_2$ y $s_3 < r_3$ términos, se obtiene una aproximación de los $m_1 \times m_2 \times m_3$ elementos del tensor original. La bondad de tal aproximación puede controlarse mediante fórmulas que proporcionan cotas a priori del error. Imponiendo que el error sea apropiadamente pequeño, se obtienen representaciones comprimidas del tensor. En ellas, debido nueva-

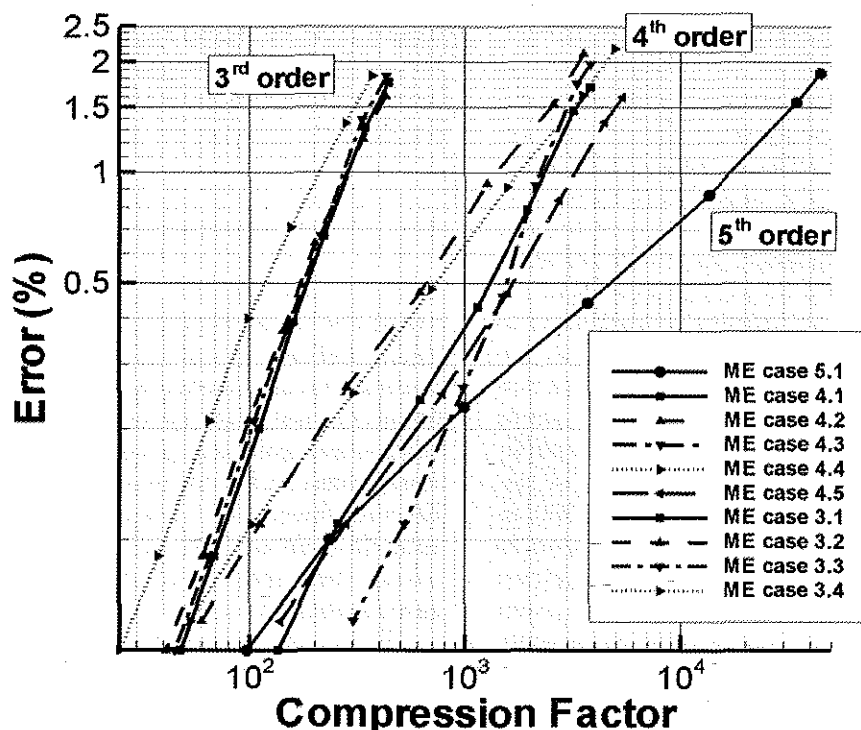
mente a redundancias entre los elementos del tensor debidas a leyes físicas, sucede con frecuencia que s_1 , s_2 y s_3 son apreciablemente más pequeños que r_1 , r_2 y r_3 .

3.3. Compresión de datos aerodinámicos

Tal como se indicó al final del apartado anterior, los $m_1 \times m_2 \times m_3$ elementos del tensor original pueden almacenarse mediante una cantidad mucho menor de números. El factor de compresión es

$$\text{FACTOR DE COMPRESIÓN} = \\ = \frac{m_1 \times m_2 \times m_3}{s_1 \times s_2 \times s_3 + s_1 \times m_1 + s_2 \times m_2 + s_3 \times m_3}$$

Nótese que si los cocientes m_1/s_1 , m_2/s_2 y m_3/s_3 son simultáneamente grandes, la compresión es más efectiva que en orden dos. Si tales cocientes son mayores que $f > 1$ el factor de compresión escala con f^3 en el caso de tensores de orden tres, y con f^n en tensores de orden n . Se tiene por tanto una eficacia tanto mayor (exponencialmente mayor, de hecho) cuanto mayor es el orden del tensor. Para ilustrar esta afirmación, en la figura 1 se consideran varias bases de datos relacionadas con el campo aerodinámico en un entorno del estabilizador horizontal (es decir, una de las dos superficies horizontales que lleva el avión en la cola), que se representa de forma esquemática en la figura 2. El campo fluido alrededor del estabilizador se discretiza mediante $m = 850.000$ puntos (en cada uno de los cuales deben darse seis magnitudes fluidas, las tres componentes de la velocidad, la presión, la densidad y la temperatura). Se consideran $9 \times 13 = 117$ bases de datos para nueve valores del número de Mach M (entre 0,4 y 0,8) y 13 valores del ángulo de ataque α (entre -3° y 3°). Tal rango de variación de los parámetros incluye topologías de flujo muy distintas, que pueden contener ondas de choque o no, y zonas de desprendimiento de la corriente o no, y estar situadas ambas en la parte superior (ex-



Factor de compresión del orden de 10.000, manteniendo una precisión de un 1%.

FIGURA 1.

Error de la aproximación frente al factor de compresión para varias bases de datos aerodinámicas en torno a un estabilizador horizontal.

tradós) o inferior (intradós) del estabilizador.

En la figura 1 se representa (ver [9] para más detalles), para varias combinaciones del número de modos, el error de la aproximación en términos del factor de compresión. Se consideran tres tipos de tensores:

- los tensores de tercer orden que resultan de representar las variables aerodinámicas en el flujo alrededor de un ala en términos de tres coordenadas espaciales, para valores fijos de M y α ,
- el tensor de cuarto orden que resulta de añadir la dependencia en M (para valores fijos de α), o la dependencia en α (para valores fijos de M) a los tensores del caso anterior, y
- el tensor de quinto orden que resulta de considerar a la vez la dependencia en las tres coordenadas espaciales y en los dos parámetros.

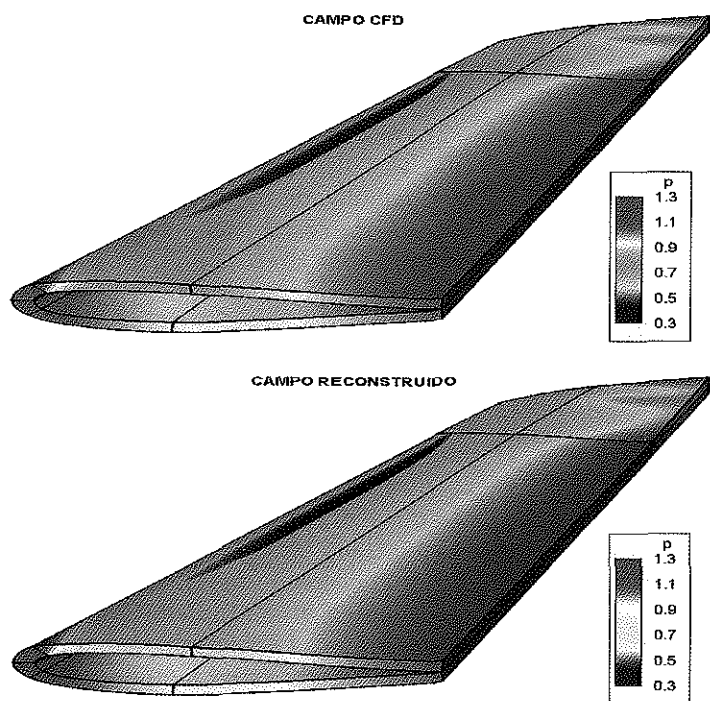


FIGURA 2.

Comparación del campo de presiones en un pequeño entorno de un estabilizador horizontal, obtenido mediante un modelo de turbulencia (izquierda) y un método de Descomposición en Valores Singulares (derecha).

Nótese que el factor de compresión aumenta exponencialmente al aumentar el número de dimensiones, tal como se anticipaba más arriba. Esto es así porque la redundancia de las configuraciones aumenta al introducir nuevos parámetros. De hecho, puede preverse que, mientras que el tamaño de la base de datos aumenta exponencialmente con el número de parámetros, la cantidad de modos aumenta sólo algebraicamente. Por tanto, estos métodos son tanto más eficaces cuanto mayores son las bases de datos, es decir, cuanto más necesario es comprimir. En particular, aceptando errores del 1%, se tiene una compresión del orden de 300 en cada campo aerodinámico, del orden de 2.000 en cada familia uni-paramétrica de campos aerodinámicos, y del orden de 10.000 en cada familia bi-paramétrica. Y el resultado es magnífico, tal como se ilustra en la figura 2. Nótese que para errores menores que el 0,3% la compresión deja de aumentar exponencialmente con el número de parámetros, debido a que éste es el nivel de errores numéricos, intrínsecos en la base de datos. En otras palabras, a este nivel de errores se pierden las redundancias originales, que posibilitan la compresión efectiva de los datos.

Este modo de comprimir información es "inteligente" en el sentido de que, además de permitir reconstruir la base de datos original, como hacen los compresores típicos, guarda los datos de manera que pueden utilizarse directamente para calcular propiedades de interés. Y, si se comprime de modo adecuado, la nueva información puede también utilizarse para completar información anterior. En cualquier sector industrial, las empresas que utilizan simulación numérica y/o experimentación en sus desarrollos, terminan almacenando bases de datos gigantescas, procedentes de diseños anteriores, con las que a veces no se sabe bien qué hacer. Utilizando estos métodos, pueden tratarse tales bases de datos para su uso en diseños posteriores. En cierto modo, se actúa como hace el cerebro de un experto, que sintetiza su experiencia anterior para adivinar tendencias

cualitativas e incluso cuantitativas en una situación nueva. En otras palabras, estos métodos pueden ayudar a convertir bases de datos desestructuradas en conocimiento.

3.4. Ondas de choque

La información comprimida puede utilizarse para reconstruir la configuración del flujo para los valores de los parámetros considerados en la base de datos original. Para el resto, puede utilizarse interpolación, pero interpolando los modos, no los flujos reconstruidos. Esto conduce a una interpolación más sencilla y eficaz. Pero deben tenerse en cuenta las características de los flujos aerodinámicos.

El flujo alrededor de una aeronave comercial en régimen de crucero presenta *ondas de choque* que, en principio, no son adecuadas para estos métodos. La razón es que las ondas de choque producen saltos en algunas magnitudes, como la presión, y los métodos involucran descripciones de los estados del flujo mediante combinaciones lineales de ciertos modos. Pues bien, las combinaciones lineales de saltos (escalones) no proporcionan saltos, sino escaleras, lo que conduce a una eficacia mucho menor de los métodos. Por ello, hay que tratar las ondas de choque de modo específico para que los métodos no pierdan eficacia. Tal tratamiento consiste en realidad en una idea sencilla: quitar la onda de choque antes de aplicar el método, y volver a añadirla después, para reconstruir los campos aerodinámicos finales; ver [10] para más detalles.

En la figura 3 se representa el resultado de aplicar estos métodos a campos de presiones a lo largo del extradós de un perfil aerodinámico, sin tratamiento específico de las ondas de choque; como referencia, también se representa el resultado obtenido mediante interpolación y, con trazo continuo, la distribución "correcta" obtenida mediante un código numérico. Nótese que, como se anticipaba, el único salto debido a la onda de choque se descom-

pone en cuatro saltos espurios. Y en la figura 4, se da el resultado de aplicar el método con tratamiento de ondas de choque, que produce un resultado magnífico.

3.5. Modelos reducidos

Cada una de las magnitudes fluidas de cualquier configuración del flujo alrededor del estabilizador puede aproximarse mediante *combinaciones lineales de modos* (unos 40 modos para el ejemplo del estabilizador considerado más arriba). Los coeficientes de estas combinaciones lineales (*amplitudes de los modos*) pueden calcularse proyectando las ecuaciones originales del movimiento sobre los modos. Se obtiene así un *modelo reducido* de tantas ecuaciones como modos (unas 40), que sustituyen a las 850.000 ecuaciones (tantas como puntos en la discretización espacial) que involucraba el método numérico original. Con ello se consigue calcular el flujo en un tiempo mucho menor que el requerido por el esquema numérico original.

La idea anterior puede aplicarse en primer lugar a problemas relacionados, en que el número de Reynolds es más bajo. Por ejemplo, al flujo no isotermo a lo largo de un escalón inverso (*back step flow*), calentado desde la pared inferior [11-12]. Tal problema tiene interés en el estudio de microcambiadore de calor, a los que me referiré más adelante, y tiene la complicación adicional de que la viscosidad varía en un factor de 300% en el rango de temperaturas considerado. A pesar de ello, este problema es más sencillo que el aerodinámico, lo que permite estudiar mejor algunas cualidades del método que son esenciales optimizar la eficacia computacional. En particular, se observa que:

1. Debido a que se utilizan las ecuaciones originales (proyectadas sobre los modos), los modelos reducidos requieren mucha menos información (es decir, muchas menos instantáneas de flu-

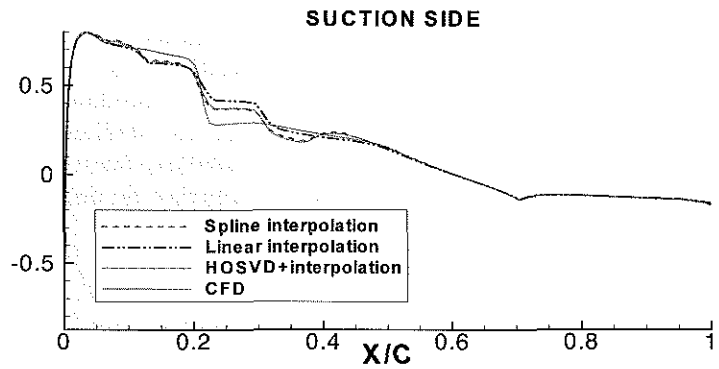


FIGURA 3.

Campo de presiones en el extradós de un perfil aerodinámico obtenido mediante interpolación entre distribuciones para valores cercanos de los parámetros (trazos), mediante Descomposición Ortogonal Propia de Alto Orden más Interpolación (trazo-punto), y mediante simulación numérica (línea continua).

jo) que la necesaria si se utiliza interpolación.

2. Los esquemas numéricos industriales suelen contener *términos espurios* (desde el punto de vista físico), que se introducen por razones puramente numéricas, para evitar que el método fracase por haber utilizado una discretización demasiado gruesa. Pues bien, tales términos pueden ignorarse al obtener el modelo reducido, que es *robusto*, es de-

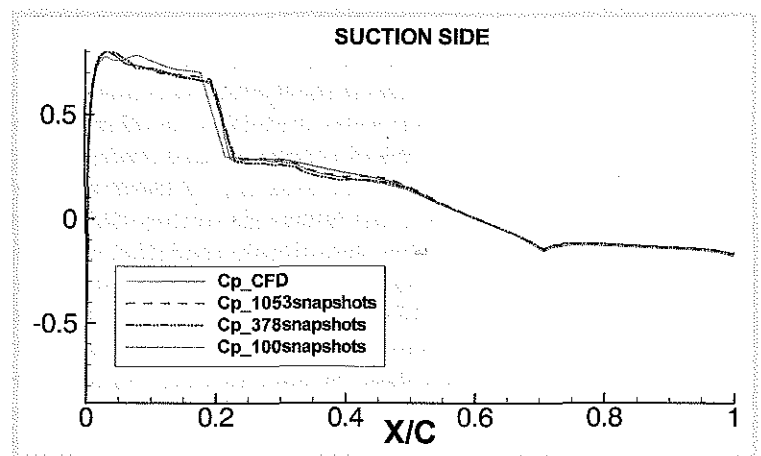


FIGURA 4.

Resultado análogo al de la figura 3, pero tratando previamente las ondas de choque. Las distintas aproximaciones corresponden a tomar distintos números de instantáneas del campo aerodinámico, en el espacio paramétrico M vs. α .

cir, independiente del esquema numérico mediante el que se haya obtenido. De hecho, pueden mezclarse datos procedentes de cálculos obtenidos mediante esquemas numéricos distintos, o de una combinación de datos experimentales y numéricos.

3. El modelo reducido es *preciso* porque sus resultados están afectados de errores que son ligeramente superiores a los del esquema numérico original. Es más, cuando se dan discrepancias entre ambos, se observa (recalculando mediante un método numérico mejor) que los resultados del modelo reducido son más exactos que los originales [12]. Ésta ha sido una muy agradable sorpresa (entre otras varias) al aplicar estos métodos, que los convierte en un modo de, no sólo acelerar, sino también mejorar cálculos numéricos obtenidos mediante códigos industriales. La razón, naturalmente, es que en el modelo reducido no sólo se procesa la información. Se vuelven a resolver las ecuaciones exactas, minimizando el error, de manera que proporcionan *la mejor aproximación* del flujo descrita por esos modos.
4. En línea con lo anterior, para proyectar las ecuaciones de Navier-Stokes no es necesario utilizar todo el campo fluido, sino sólo una "parte representativa" de éste. Esto ahorra tiempo de cálculo pero, sobre todo, abre perspectivas con vistas a reconstruir bases de datos dañadas, y/o completar medidas experimentales.
5. El último comentario del punto anterior responde a la siguiente idea. Si, en realidad, el modelo reducido involucra sólo N grados de libertad, para operar con éstos, o calcularlos, solamente deben ser necesarias unas N condiciones; quizá algunas más, dado que todos los cálculos involucran aproximaciones. Por tanto, para

obtener el modelo reducido debe bastar con información del campo fluido en, digamos, $2N$ puntos, siempre que éstos se seleccionen con criterio. De ningún modo es necesaria la información, muy redundante, de todos los puntos de la discretización espacial. Efectivamente, se comprueba que es así [12].

6. Utilizando las simplificaciones que resultan de las ideas anteriores, los cálculos mediante el modelo reducido son tan rápidos que el cuello de botella para acelerar el método es el cálculo, mediante simulación numérica, de las instantáneas del flujo de las que se deducen los modos espaciales. Ahora bien, esas instantáneas contienen (nuevamente) muchas redundancias y, por tanto, puede reducirse el número de casos a calcular. De hecho, es posible construir un algoritmo que selecciona las instantáneas que contienen máxima información.

La obtención de modelos reducidos de flujos aerodinámicos transónicos tiene la complicación adicional asociada a las ondas de choque, que deben pre-procesarse [13] mediante las ideas descritas en el apartado 3.4. Tienen la ventaja (que, en principio, podría verse como un inconveniente), en cambio, de que el número de Reynolds es altísimo (del orden de 10 millones, para el flujo alrededor de un estabilizador horizontal), lo que permite predecir que el efecto de los términos viscosos (sean estos de viscosidad molecular, o los asociados a los modelos de turbulencia que suelen utilizarse en las simulaciones numéricas) en las integrales asociadas a la proyección de las ecuaciones originales sobre los modos, es pequeña. Por tanto, aunque los modos provienen de cálculos numéricos que tienen en cuenta los efectos viscosos, la proyección de las ecuaciones puede hacerse ignorando éstos, mediante las ecuaciones de Euler [13]. Nuevamente, ésta ha sido una agradable sorpresa que

hace que estos modelos reducidos sean independientes de los modelos de turbulencia que se hayan utilizado para calcular las instantáneas de flujo, lo cual los hace muy adecuados para fines industriales.

3.6. Aceleración de métodos numéricos

Una de las ventajas de los métodos anteriores está en la aceleración del proceso global. Pero, como la parte más lenta del proceso es la simulación numérica que proporciona las instantáneas del flujo, acelerar directamente el código numérico original puede producir un aumento adicional de la eficacia del método. Es decir, ahora se trata de acelerar el cálculo de cada uno de esos casos particulares, actuando directamente sobre el código numérico. Nuevamente, se empieza con casos más sencillos.

La idea básica es la siguiente [14]. Supongamos que un cierto código numérico, muy costoso, nos proporciona la evolución con el tiempo de un sistema físico. Nótese que tanto el tiempo como el espacio están discretizados, de modo que puede suponerse que toman valores enteros. Apliquemos el código numérico durante un intervalo temporal, I_D , desde el instante inicial. Tomemos ahora los elementos de la matriz S de modo que S_{ij} sea el valor de la variable, en el instante j y el punto i de la discretización. La descomposición en valores singulares de la matriz proporciona *modos espaciales* que, si se han tomado suficientes intervalos temporales en la discretización, describen bien el estado del sistema durante el intervalo de tiempo I_D . La pregunta es ¿describirán los modos también la solución para tiempos posteriores? La respuesta es sí, si se toman algunos modos más de los estrictamente necesarios. Esto es debido a una idea matemática muy básica: es de esperar que los modos espaciales *dependan continuamente* del tiempo. En tal caso, si se proyectan las ecuaciones sobre los modos espaciales, se obtiene un *modelo reducido* del código

numérico original que es mucho más eficaz (rápido) computacionalmente. Tal modelo reducido describe bien la solución durante un cierto intervalo de tiempo I_G . La manera de proceder resulta entonces obvia:

- Calcúlese la solución mediante el código numérico original durante un cierto intervalo de tiempo I_D , y calcúlense la matriz S , los modos espaciales y el correspondiente modelo reducido.
- Utilícese el modelo reducido durante un intervalo de tiempo I_G , *en tanto en cuanto dé una buena aproximación del código numérico original.*
- A partir de ese momento, vuelva a utilizarse el código original durante un nuevo intervalo I_D , para construir una nueva matriz S que permita calcular nuevos modos.
- Repítase el proceso tantas veces como sea necesario.

Naturalmente, como no es difícil adivinar, el punto crucial es saber cuándo deja de ser buena la aproximación y predecir esto sin necesidad de calcular la solución del modelo completo, que es justamente lo que se quiere evitar. Tal dificultad se resuelve mediante una estimación *a priori* del error, basada en ideas matemáticas básicas de la teoría de aproximación, que resulta ser tremendamente eficaz. Además, buscando avanzar en el camino hacia la industrialización del método, es posible construir un algoritmo que selecciona de modo automático todos los parámetros libres del método como, por ejemplo, las longitudes de los intervalos I_D e I_G , y el número de modos que se retienen. Más aún, el modelo reducido puede construirse de manera que, cada vez que se calculan nuevos modos, no se parta de cero, sino que se utilice la información sobre los modos que ya se tiene. De alguna manera, entre dos cálculos sucesivos de los modos, éstos solamente han sufrido un pequeño giro; se está utilizando aquí, nuevamente, la idea de que los modos dependen conti-

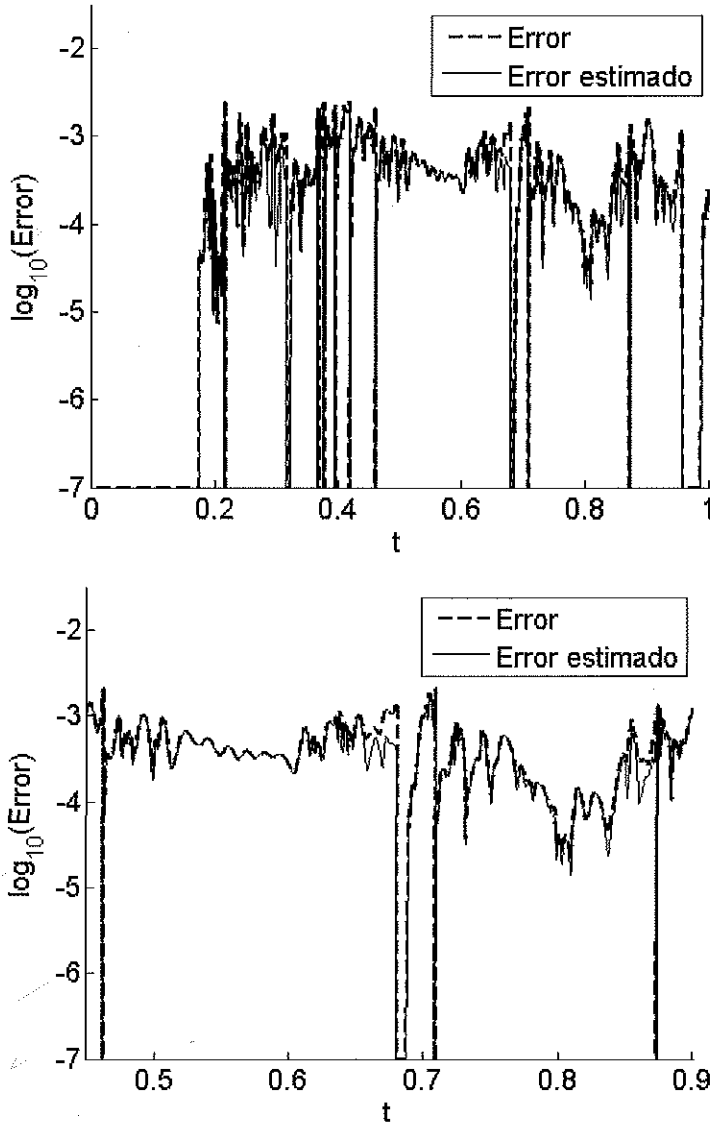


FIGURA 5.

Logaritmo del error del modelo reducido en función del tiempo, comparando el valor exacto del error y el estimado.

nuamente del tiempo. Por tanto, no es necesario recalcular los modos enteros, sino solamente esos pequeños giros, lo cual requiere mucha menos información, es decir, intervalos I_D más cortos.

El algoritmo ya es completamente operativo para ecuaciones unidimensionales [14], como la ecuación de Ginzburg-Landau, que es un paradigma de ecuación sencilla con comportamientos muy complejos. La ecuación es

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 + i\alpha) \frac{\partial A}{\partial x} + \nu A - (1 + i\beta) |A|^2 A$$

y describe la evolución temporal de una variable compleja A en el intervalo $0 < x < 1$, imponiendo condiciones de contorno nulas ($A = 0$) en $x = 0$ y 1 . Para ilustrar los resultados, en las figuras 5 y 6 se considera el caso $\alpha = -2$, $\beta = 9$ y $\nu = 120$.

En la figura 5 se representa, en función del tiempo, el logaritmo del error del modelo reducido durante los intervalos en que se utiliza éste. La escala logarítmica permite representar bien cantidades que toman valores separados entre sí por varios órdenes de magnitud (entre 10^{-7} y 10^{-3} en nuestro caso). El error se calcula de dos modos,

- i) comparando con la solución exacta y
- ii) calculándolo mediante el estimador a priori.

Como se ve en la figura, los dos cálculos del error son indistinguibles, y ésta es la clave de la eficacia del método. Los 11 intervalos en que la solución se calcula mediante el esquema numérico original pueden identificarse porque en ellos el error es cero. Nótese que estos intervalos son cada vez más pequeños; esto se debe a que, como se indicó anteriormente, después del primer intervalo solamente hace falta actualizar los modos, utilizando la información de que ya se dispone. Por tanto, el método es tanto más eficaz cuanto mayor es el intervalo de tiempo en que se trabaja.

En la figura 6 se representa la evolución con el tiempo de los valores de $|A|$ en los puntos $x = 1/4$, $1/2$ y $3/4$. Nótese que se está calculando una solución cuya evolución temporal es compleja, es decir, no es periódica ni casi-periódica. A pesar de ello, el método aproxima con la precisión deseada (un 0,2% en este caso).

3.7. Extensiones

Las ideas anteriores han dado lugar a métodos que se esperan industrializar (convertir en métodos susceptibles

de ser utilizados en diseño) en un futuro próximo; de hecho, estas ideas ya han dado lugar a cuatro patentes, que se están tramitando en EE.UU. y serán copropiedad de Airbus y la UPM. Estas ideas también se están aplicando en la ETSIA a otros problemas de interés en Ingeniería Aeroespacial. En particular:

1. En las cercanías de la superficie de la aeronave se produce un cambio brutal de velocidad, que varía entre la velocidad de la propia aeronave y una fracción de ella misma, en distancias pequeñas. Esa zona recibe el nombre de *capa límite* y tiene un comportamiento relativamente universal. Es decir, la configuración del flujo en esa pequeña capa es similar en las cercanías de distintas partes del ala, el fuselaje, o las superficies de mando. Entender el comportamiento del aire en la capa límite es esencial para comprender la transición del flujo de laminar a turbulento, y para predecir la formación de zonas de flujo desprendido. Los modelos reducidos de los flujos de capa límite contribuyen a avanzar, tanto en su conocimiento básico como en la predicción cuantitativa de las transiciones que provocan [15].
2. Los *micro-cambiadores de calor* se utilizan para refrigerar la aviónica (es decir, el conjunto de sistemas electrónicos) de aeronaves civiles y militares. La progresiva miniaturización de la electrónica a bordo está convirtiendo la refrigeración en una dificultad de primer orden. En este caso, además, debido al tamaño de los conductos de refrigeración (decenas a centenas de micras), la experimentación es costosísima, cuando no imposible. La aplicación de las ideas anteriores a estos problemas conduce a métodos rápidos de obtener criterios de diseño de estos microsistemas. La idea, en

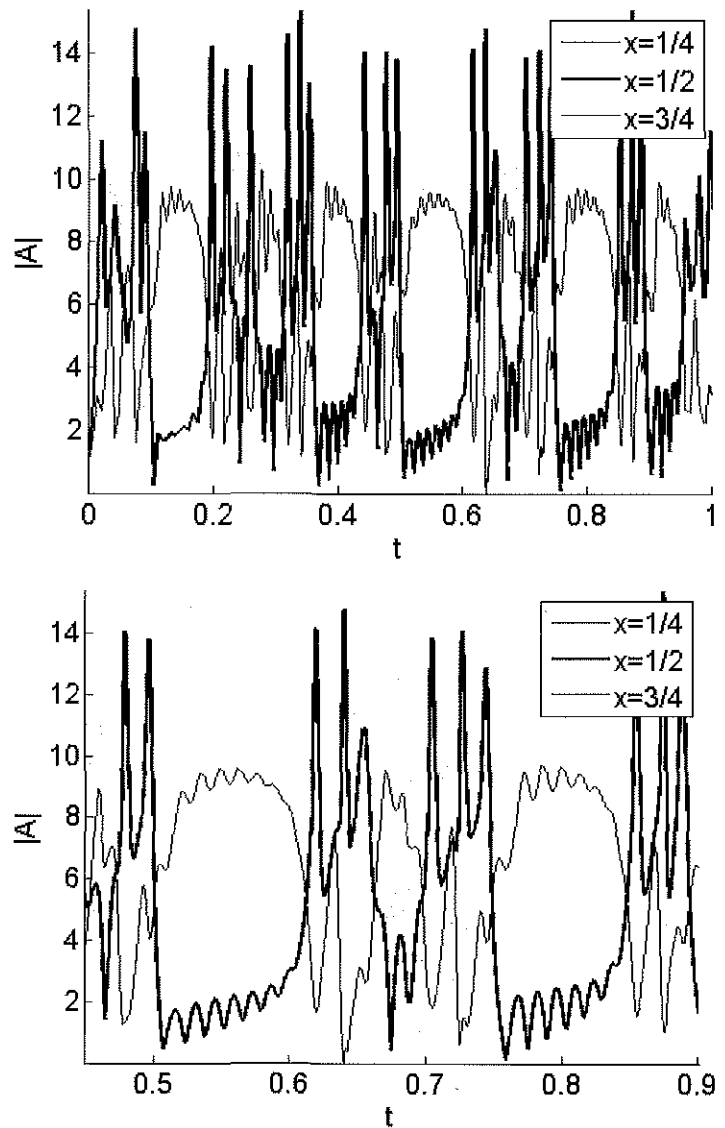


FIGURA 6.

Valores de $|A|$ en tres valores de x en función del tiempo.

este caso, es estudiar con cuidado resonancias espaciales y temporales, y transiciones no lineales que conduzcan a optimizar la eficacia térmica de estos dispositivos. Como ejemplo, en [16] se analiza el efecto de obstáculos en el flujo no isoterma en un microcanal bidimensional, calentado desde la pared inferior. El comportamiento térmico del canal se caracteriza por la eficiencia térmica Φ_T (una medida adimensional del flujo de calor desde la

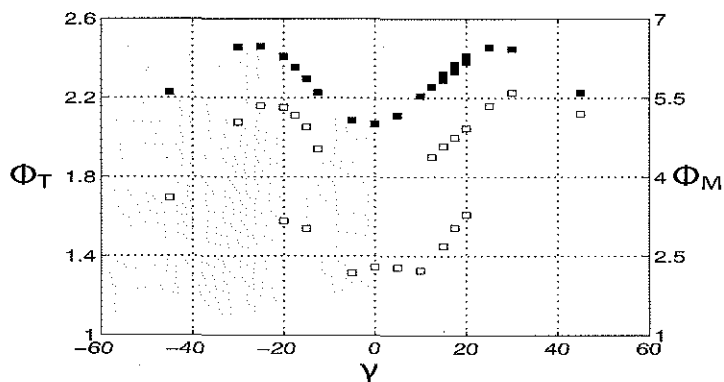


FIGURA 7.

Eficiencia térmica (en símbolos huecos) y caída de presión (en símbolos llenos) en función de la orientación del obstáculo, en grados.

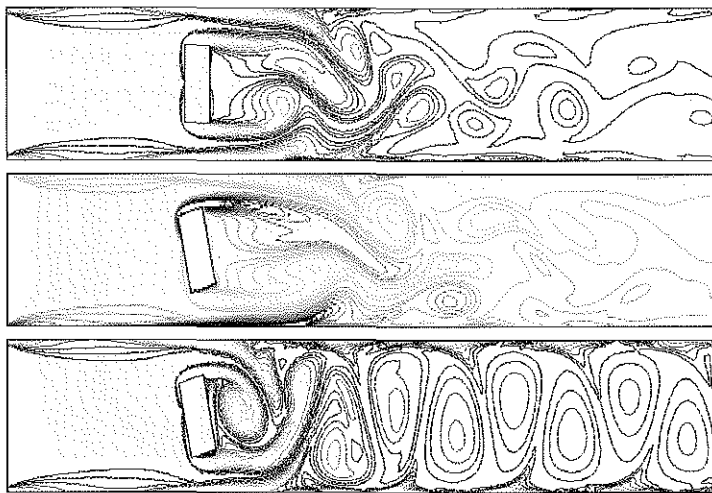


FIGURA 8.

Líneas de nivel del valor absoluto de la vorticidad en los tres regímenes de flujo que se observan en la figura 7 para valores crecientes del ángulo de orientación.

pared inferior) y la penalización mecánica Φ_M (una medida adimensional de la caída de presión horizontal, que es proporcional a la potencia de la bomba necesaria para mantener el flujo). Después de optimizar la forma y tamaño del obstáculo, se estudia el efecto de la orientación de éste respecto del canal.

En la figura 7 se representan la eficiencia térmica y la penalización mecánica en función de la orientación, encontrando tres regímenes distintos (con distribu-

ciones de vorticidad representadas en la figura 8) con dos transiciones bien definidas para $\gamma > 0$:

- i) una bifurcación transcítica en torno a 9° , y
- ii) un comportamiento con histéresis, entre 12° y 19° .

Lo interesante, desde el punto de vista de diseño, es que en la histéresis se producen saltos en la eficiencia térmica sin saltos en la penalización mecánica. En otras palabras, se obtienen mejoras sustanciales del comportamiento térmico sin apenas penalización mecánica. Por tanto, el tercer régimen, que aparece para ángulos mayores de 12° , es mucho más eficaz que los otros dos. La mayor eficacia se entiende bien por la mayor mezcla debida a los torbellinos bien establecidos que se observan en la figura 8. Nótese, por otro lado, que el criterio de diseño que se deduce del análisis anterior es difícilmente anticipable desde "consideraciones físicas".

3. En todos los ejemplos anteriores se conocen bien las ecuaciones diferenciales del movimiento. La pregunta es: si no se conociesen éstas, o se conociesen sólo de modo impreciso, como sucede en muchas situaciones de interés industrial, ¿sería aún posible obtener modelos reducidos a partir de datos experimentales? Para responder a esta pregunta, se está emprendiendo en la ETSIA el estudio de un *motor alternativo completo*. El primer paso consiste en utilizar estos métodos para acelerar el cálculo, utilizando modelos reducidos obtenidos de un *modelo aproximado del motor*, que ha sido también elaborado en la ETSIA. Con ello se busca predecir el comportamiento del motor en tiempo real, con precisión suficiente para mejorar su control electrónico. Las ideas anteriores han dado lugar a un proyecto fin de carrera en la

ETSIA, y están siendo aplicadas por José Luis Montañés al estudio de aerorreactores, con resultados muy prometedores.

4. CONCLUSIONES

Las siguientes conclusiones pueden parecer obvias. Pero ocurre que tienden a ser difíciles de implementar en la práctica, porque implican un cierto cambio de mentalidad por parte de ingenieros e investigadores, tanto en centros de investigación como en las empresas:

- La complejidad de los sistemas y productos de Ingeniería, sobre todo en el sector aeroespacial, es de tal magnitud que la manera eficaz de conseguir avances realmente significativos consiste en adoptar una perspectiva genuinamente multidisciplinar. Esto implica que los equipos de trabajo deben empezar a incorporar profesionales, ingenieros y doctores, con formación y habilidades muy distintas.
- En este contexto multidisciplinar, en que hay que desarrollar, integrar y resolver modelos de comportamiento en disciplinas diferentes, el nexo conceptual común, que unifica todo y genera la trama necesaria para crear una perspectiva consistente de trabajo, gira alrededor de métodos matemáticos. Es decir, a más sofisticación del sistema/producto, más sofisticación del lenguaje/concepto.

Lo anterior tiene implicaciones obvias, en particular, en el trabajo de I+D en departamentos universitarios. Adaptarse a los tiempos que vienen requiere:

- Abrir el abanico de intereses, desde una perspectiva más cercana a la Sociedad que, en definitiva, financia con sus impuestos la actividad de I+D en la Universidad.
- En el caso de profesionales de las Matemáticas en una escuela de

ingeniería, abrir la colaboración, tanto con colegas de otros departamentos, escuelas, facultades o universidades, como con ingenieros de empresas, que son los clientes naturales de la actividad de I+D.

La labor interdisciplinar en un departamento universitario supone estar a medio camino entre Ciencia y Tecnología. No considero conveniente, como actividad universitaria de I+D, el análisis de problemas rutinarios, que podría llegar a verse como una competencia desleal a empresas de ingeniería. Por poner un ejemplo ajeno al sector, realizar análisis de sangre no es labor aceptable de I+D. Sí lo es, en cambio, diseñar un nuevo método de análisis de sangre, más barato o fiable que los actuales, incluso si los conceptos necesarios para la elaboración del método no son muy sofisticados. La condición necesaria es que tales conocimientos o habilidades estén fuera del alcance de los laboratorios que realizan análisis de sangre.

Si se persigue una actividad que sea genuinamente de I+D, con ambos aspectos (científicos y tecnológicos) equilibrados, podrá conseguirse (aunque esto no sea fácil) resolver problemas de interés industrial mediante métodos e ideas novedosos, al menos en el ámbito tecnológico, y por tanto publicables en revistas de la especialidad. Convendría impulsar este tipo de actividad también a través de su valoración en el currículum de candidatos a ocupar plazas permanentes en la universidad. Creo, de hecho, que la evaluación del trabajo universitario es un problema no resuelto en nuestro país, que requeriría una postura beligerante por parte de las autoridades académicas. Asimismo, cada vez estoy más convencido de que en la universidad hay mucho talento mal aprovechado, y defraudado a veces, que podría contribuir a una actividad de I+D más eficaz y valiosa si se encontrase el modo de concretar las oportunidades a que me refería al principio. La figura de *Gestor de I+D*,

que se conoce como *Traductor Tecnológico* en algunos países, podría ser crucial en esta dirección. No me refiero a gestores puramente administrativos, sino a personas con demostrada experiencia en I+D, capaces de identificar tanto problemas industriales susceptibles de ser resueltos en departamentos universitarios como habilidades y talentos ya existentes en la propia universidad. Y creo también que aprovechar las nuevas oportunidades que empiezan a presentarse requiere una apertura de intereses por parte de las empresas, que lleve a reconocer que el valor añadido real está cada vez más ligado a ideas y métodos que tengan, a la vez, una sólida base científica, y la componente de innovación que puede marcar diferencias en el mercado.

AGRADECIMIENTO

Buena parte de los métodos y resultados descritos más arriba se han desarrollado bajo la dirección conjunta de Ángel Velázquez, profesor de Ingeniería Aeroespacial en la ETSIA, y mía. Estoy en deuda también con las profesoras de la ETSIA María Higuera y María Luisa Rapún, con el profesor Fernando Varas, de la Universidad de Vigo, y con los estudiantes de doctorado Diego Alonso, Elliot Baché, Luís Lorente, Sergio de Lucas y Filippo Terragni, de la ETSIA, y Marcos Meis, de la Universidad de Vigo. A María Luisa, a Luis y a Fernando también les debo los cálculos y las figuras que aparecen en esta lección. Y quiero agradecer la ayuda continuada, impagable, de Carlos Artiles y Valentín de Pablo, de Airbus SAS, en la identificación de problemas relevantes y requisitos de la ingeniería.

REFERENCIAS

- [1] E. P. WIGNER: "The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences". *Comm. Pure Appl. Math.* 13 (1960), 1-14.
- [2] R. COURANT and D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I. Interscience, 1955.
- [3] LE LIONNAIS: *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*. Cahiers du Sud, Paris, 1948.
- [4] B. RUSSEL: *Principles of Mathematics*. The Norton Library, Londres, 1902.
- [5] R. FREEDMAN: *The Wright Brothers: How They Invented the Airplane*. New York: Holiday House, 1991.
- [6] G. H. GOLUB and G. T. VAN LOAN: *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, 1996.
- [7] V. DA SILVA and L. H. LIM: "Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem". *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 30 (2008), 1084-1127.
- [8] L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR, and J. VANDEWALLE: "On the best rank-one and rank-(R_1, R_2, \dots, R_N) approximation of higher order tensors". *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21 (2000), 1324-1342.
- [9] L. LORENTE, J. M. VEGA and A. VELÁZQUEZ: "Compression of aerodynamic databases using High Order Singular Value Decomposition". *Aerospace Sci. Tech.*, under review, 2009.
- [10] L. LORENTE, J. M. VEGA and A. VELÁZQUEZ: "Generation of aerodynamics databases using Singular Value Decomposition". *J. Aircraft* 45 (2008), 1779-1788.
- [11] D. ALONSO, A. VELÁZQUEZ and J. M. VEGA: "Robust reduced order modeling of heat transfer in a back step flow". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52 (2009) 1149-1157.
- [12] D. ALONSO, A. VELÁZQUEZ and J. M. VEGA: "A method to generate computationally efficient reduced order models". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 198(2009), 2683-2691.
- [13] D. ALONSO, J. M. VEGA and A. VELÁZQUEZ: "Reduced order model for viscous aerodynamic flow past an airfoil". *AAIA Journal*, under review, 2009.
- [14] M. L. RAPÚN and J. M. VEGA: "Reduced order models based on local POD plus Galerkin projection". *J. Comp. Phys.*, under review, 2009.
- [15] M. HIGUERA and J. M. VEGA: "Modal description of internal optimal streaks". *J. Fluid Mech.* 626 (2009), 21-31.
- [16] M. MEIS, F. VARAS, A. VELÁZQUEZ and J. M. VEGA: "Heat transfer enhancement in micro-channels caused by vortex promoters". *Int. J. Heat Mass Transfer*, under review, 2009.